Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

141 | Printemps 1998
Varia

J.-F. Laslier, "Tournament solutions and majority voting", Berlin, Springer, 1997. Préface d'Hervé Moulin

A family of distributions: from paretian to "contra-paretienne"

Olivier Hudry

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/2778
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 1 mars 1998
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Olivier Hudry, « J.-F. Laslier, "Tournament solutions and majority voting", Berlin, Springer, 1997. Préface d'Hervé Moulin », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 141 | Printemps 1998, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 27 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/2778

BIBLIOGRAPHIE

LASLIER, J.-F.,*Tournament solutions and majority voting*, Berlin, Springer, 1997. Préface d'Hervé Moulin.

Lorsque J. W. Moon écrivit il y a trente ans son ouvrage *Topics on tournaments* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968) consacré aux tournois, il pouvait espérer recenser la plupart des résultats concernant cette structure en un seul livre. Il réussit si bien que sa monographie reste une référence sur le sujet encore aujourd'hui. Pourtant, depuis cette date, de nombreux développements, dans des directions variées, sont venus enrichir ce domaine, et il serait sans doute souhaitable de renouveler ce genre de synthèse.

Jean-François Laslier contribue à ce renouvellement, en orientant son livre sur le sujet bien vivant des "solutions de tournois". Un tournoi étant une relation binaire complète asymétrique définie sur un certain ensemble X, on rencontre cette structure dans différents contextes, par exemple pour représenter le résultat d'une méthode de comparaison par paires et, plus généralement, en théorie du choix social. Ainsi, si X représente l'ensemble des candidats en lice lors d'une élection, on pourra considérer le "tournoi majoritaire" T associé à l'élection. Celui-ci est défini sur X de la manière suivante (on suppose ici, pour simplifier, qu'il n'y a pas d'*ex æquo*) : pour tout candidat x et tout candidat y avec $x \neq y$, on aura xTy si x est préféré à y par une majorité de votants. Il est bien connu que, dans ce genre de procédure, le tournoi obtenu peut ne pas être transitif (pour certains candidats x, y et z, une majorité de votants préfère x à y, une autre y à z et une troisième z à x), même si on suppose que les préférences des votants sont des ordres totaux définis sur X : c'est ce que G. Th. Guilbaud a appelé l'"Effet Condorcet". Il se peut même qu'il n'y ait pas de "vainqueur de Condorcet", c'est-à-dire un candidat qui soit majoritairement préféré à tout autre candidat. La question se pose alors de savoir qui doit être considéré comme vainqueur de l'élection.

C'est précisément pour répondre à ce genre de questions qu'on fait appel aux "solutions de tournois". Formellement, une "solution de tournois" S est une application de l'ensemble des tournois T définis sur X dans $2^X - \emptyset$ à laquelle on peut imposer de vérifier certaines propriétés, par exemple de sélectionner le vainqueur de Condorcet c de T et seulement celui-ci quand un tel vainqueur existe : on doit alors avoir $S(T) = \{c\}$. Plus intuitivement, une solution S peut être interprétée comme une manière de sélectionner certains éléments de X qui seront considérés comme les meilleurs ou les "vainqueurs" du tournoi auquel on applique S. En l'absence de vainqueur de Condorcet, le choix des vainqueurs n'est pas évident, et la situation devient encore plus ardue si on ne se contente pas d'un vainqueur, mais si on veut classer tous les candidats. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature, depuis celle étudiée par E. Zermelo en 1929 sous forme d'un maximum de vraisemblance (et retrouvée sous une autre forme par A. Copeland en 1951) jusqu'aux développements bien plus récents issus de ce florissant domaine. Ce qui les distingue et permet à l'utilisateur de choisir l'une plutôt que l'autre en fonction de ses besoins, ce sont les propriétés vérifiées ou non par ces solutions. L'objectif du livre de J.-F. Laslier est justement de dresser la liste de ces propriétés et de faire un recensement exhaustif des solutions qui ont été proposées par différents chercheurs.

Plus précisément, après la préface d'Hervé Moulin qui replace l'ouvrage de Jean-François Laslier dans le contexte du choix social, le premier chapitre est consacré aux généralités sur les tournois et introduit les notations et les concepts communs aux différents chapitres du livre.

Le deuxième est celui dans lequel on trouve les propriétés auxquelles on s'intéresse. Certaines sont classiques, comme la monotonie ; d'autres en revanche le sont beaucoup moins, par exemple la faible cohérence par composition. Les propriétés décrites sont les suivantes : la monotonie, la régularité, la propriété forte du sur-ensemble, l'indépendance par rapport aux perdants, l'idempotence, la propriété de M. Aizerman, la cohérence par composition et un affaiblissement de celle-ci. Ces propriétés n'étant pas indépendantes, les implications les reliant sont en outre précisées.

Le troisième chapitre décrit les solutions de tournois qui conduisent à un classement des candidats, à savoir :

- la solution de A. H. Copeland, qui consiste simplement à compter les victoires de chaque élément (et qui donne, comme on l'a vu, les mêmes vainqueurs que celle de E. Zermelo) ;
- la méthode de la valeur propre (appelée aussi "méthode du long chemin"), fondée sur le calcul des puissances itérées de la matrice associée au tournoi ;
- une solution markovienne, que l'auteur compare à un match de ping-pong dans lequel le vainqueur d'une partie rejoue contre un nouvel adversaire ; le vainqueur du match tout entier est alors le joueur qui joue le plus longtemps ;
- enfin, la solution de P. Slater, qui consiste à déterminer un ordre total à distance minimum du tournoi, la distance étant celle de la différence symétrique.

Pour chaque solution envisagée, l'auteur indique les propriétés du chapitre 2 qui sont vérifiées et celles qui ne le sont pas. De plus, il précise les relations qui existent entre les vainqueurs sélectionnés par des solutions distinctes : pour deux solutions de tournois S et S', a-t-on $S(T) \subseteq S'(T)$ pour tout tournoi T, ou bien a-t-on $S(T) \cap S'(T)$ $\varnothing$, toujours pour tout tournoi T, ou bien au contraire existe-t-il des tournois T tels que les vainqueurs sélectionnés par S puissent être complètement différents de ceux sélectionnés par S', c'est-à-dire tels que $S(T) \cap S'(T) = \varnothing$?

Le chapitre 4 constitue une application originale des méthodes statistiques à l'étude des solutions de tournois. Dans le but de fournir une description géométrique du tournoi T dont il est question, les éléments de X sont considérés comme formant un certain nuage de points dans l'espace euclidien de dimension $|X|$; l'objectif est alors de chercher une représentation de T optimale par rapport à un certain critère dans un espace de petite dimension (en fait, on cherche une projection maximisant l'inertie du nuage préservée au cours de cette opération). Le domaine de l'analyse multivariée (plus précisément, l'analyse en composantes principales) permet d'atteindre cet objectif. On peut ensuite examiner comment se positionnent les vecteurs caractérisant les classements obtenus en appliquant à T les solutions de tournois décrites précédemment et obtenir ainsi de nouveaux renseignements les concernant.

On revient à de nouvelles solutions de tournois au cours du chapitre 5. Celles-ci sont fondées sur des relations de couverture entre éléments de X. On y trouve ainsi les solutions suivantes :

- l'ensemble des éléments non couverts, au sens habituel de la couverture (un élément x de X couvre un autre élément y de X si tout élément battu par y l'est aussi par x), ainsi que les solutions obtenues en itérant la relation de couverture (on considère les éléments non couverts dans le sous-tournoi engendré par les éléments non couverts de T, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'ensemble des vainqueurs déterminé de cette façon se stabilise) ;
- l'ensemble couvrant minimum proposé par B. Dutta en 1988, qui possède de bonnes propriétés mais qui semble difficile à calculer ;
- de récentes solutions obtenues par divers affaiblissements de la relation de couverture classique, proposées par G. Laffond et J. Lainé en 1994 ou par V. Levchenkov en 1995.

Là encore, les propriétés de ces solutions sont précisées, ainsi que les liens existant entre elles et les autres solutions.

Le chapitre 6 aborde un nouvel aspect des tournois, considérés comme support d'un jeu à deux joueurs et à somme nulle. La théorie des jeux permet alors d'introduire de nouveaux concepts, comme l'équilibre de Nash, et une nouvelle solution de tournois : l'ensemble du bipartisan, qui est un raffinement de l'ensemble couvrant minimum. Le chapitre se termine par une interprétation plus générale des jeux définis à l'aide de tournois (illustrée par une petite histoire de chevaliers du Moyen Âge dont les joutes se ramènent au "baccara du bagne", jeu classique qui fait intervenir des ciseaux, une feuille de papier et un caillou).

Une autre catégorie de solutions est abordée dans le chapitre 7 : celles définies à l'aide de relations de contestation. Deux solutions sont ainsi obtenues :

- la solution de J. Banks, datant de 1985, qui consiste à prendre comme vainqueurs les éléments qui sont vainqueurs de Condorcet d'un sous-tournoi transitif maximal par rapport à l'inclusion ;
- l'ensemble d'équilibre défini par T. Schwartz en 1990, qui est un raffinement de l'ensemble des vainqueurs de Banks.

Le chapitre 8 est consacré aux algèbres de tournois et aux arbres binaires. Ces outils permettent de reprendre l'étude de certaines des solutions décrites dans les chapitres précédents sous un jour nouveau et de préciser certaines propriétés algébriques qu'elles possèdent.

L'étude développée au cours des chapitres précédents montre que deux solutions ne sélectionnent pas nécessairement les mêmes éléments de X comme vainqueurs. L'idée du chapitre 9 est d'introduire une mesure permettant d'évaluer quantitativement les différences existant entre les vainqueurs de Copeland d'un tournoi T et ceux exhibés par une autre solution de tournois appliquée à T. La "valeur de Copeland" d'une solution S remplira cette mission. Pour cela, on définit, pour tout tournoi T, le rapport entre le score de Copeland maximum d'un vainqueur de T selon S et le score d'un vainqueur de Copeland dans T. La valeur de Copeland de S est par définition la plus petite valeur prise par ce rapport quand T décrit l'ensemble de tous les tournois. Le chapitre 9 donne des encadrements de la valeur de Copeland de la plupart des solutions introduites aux chapitres précédents.

Quant au dernier chapitre, il conclut en suggérant diverses applications et généralisations des concepts développés dans le livre pour des tournois. Il fournit notamment des indications sur les "tournois généralisés", structures représentables par des matrices qui ne contiennent pas nécessairement que des 0 et des 1.

Le tout est complété bien sûr par les références bibliographiques auxquelles renvoie le texte, mais aussi par quatre annexes fort utiles : un tableau synthétisant les relations entre les solutions qui font l'objet de cet ouvrage (qui aurait d'ailleurs pu indiquer pour quelles valeurs de $|X|$ ces relations sont valables, bien que cela ne soit pas primordial) ; un tableau récapitulant les propriétés que ces dernières vérifient ; une correspondance entre certains concepts relatifs aux tournois et d'autres habituels en théorie des jeux ; un exemple sous forme d'un tournoi à sept éléments auquel sont appliquées les solutions décrites plus haut. Cet exemple commun aux différentes solutions explique une relative absence d'illustrations de ce genre dans le texte et en outre met en évidence la diversité des vainqueurs obtenus pour un même tournoi.

On le voit donc : ce livre aborde toutes les solutions de tournois qu'on trouve dans la littérature, des plus classiques aux plus originales, et c'est sans aucun doute l'un des mérites de cette monographie. Peut-être l'utilisateur qui souhaite mettre en œuvre ces solutions regrettera que l'aspect algorithmique lié à la détermination pratique des vainqueurs ne soit pas développé. Mais cela eût changé la nature du livre, dont le but évident est d'aborder le domaine des solutions de tournois sous l'angle axiomatique. De ce point de vue, on ne peut que constater que l'auteur a parfaitement atteint son objectif, en passant en revue de manière complète les propriétés qui permettront de départager les solutions entre elles. L'auteur s'abstient, malgré son indéniable connaissance du sujet (qu'il a contribué à développer par ses propres travaux de recherche), de préconiser telle ou telle solution, et sans doute n'a-t-il pas tort. Il appartient en effet à l'utilisateur de choisir la solution qu'il préfère, en fonction de la difficulté pour déterminer les vainqueurs et des propriétés axiomatiques dont il souhaitera pouvoir bénéficier (malheureusement, les solutions les plus intéressantes semblent être aussi les plus difficiles à calculer...).

Bien que le livre soit publié dans la collection "Studies in Economic Theory" de Springer, le lectorat ne se limitera pas aux économistes. Bien sûr, cette étude s'adresse prioritairement aux chercheurs qui travaillent dans le domaine du choix social. Mais elle retiendra aussi l'attention de tous ceux qui s'intéressent à divers aspects des tournois, qu'ils soient combinatoires par exemple ou liés aux applications où interviennent ces structures. C'est pour cela qu'un public plus large de lecteurs pourra accorder au livre de Jean-François Laslier une place de choix dans sa bibliothèque, à côté de l'ouvrage de J. W. Moon, qui devra désormais partager son rôle de référence pour ce qui concerne les tournois.

O. Hudry